Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2013

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Kryteria oceniania odpowiedzi

MAJ 2013

Zadanie 1. (0–4)

Rozwiąż nierówność $|2x-5|-|x+4| \le 2-2x$.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną (IV.3.e.R)

<u>I sposób rozwiązania</u> (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: A. $(-\infty,-4)$, B. $\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$, C. $\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

A. $x\in(-\infty,-4)$	B. $x\in\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$	C. $x\in\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$
$-2x+5+x+4\le 2-2x$ $x+9\le 2$ $x\le -7$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x\le -7$	$-2x+5-x-4\le 2-2x$ $-x+1\le 2$ $x\ge -1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-1\le x<\frac{5}{2}$	$2x-5-x-4\le 2-2x$ $3x\le 11$ $x\le \frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $\frac{5}{2}\le x\le \frac{11}{3}$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $x\le -7$ lub $-1\le x\le \frac{11}{3}$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty,-7\rangle \cup \left\langle -1,\frac{11}{3}\right\rangle$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki:

I. $\begin{cases} 2x-5\ge 0 \\ x+4\ge 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 2x-5\ge 0 \\ x+4< 0 \end{cases}$ III. $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4\ge 0 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4< 0 \end{cases}$

W każdym z nich rozwiązujemy nierówność bądź układ nierówności

$\begin{cases} 2x-5\ge 0 \\ x+4\ge 0 \\ 2x-5-x-4\le 2-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge \frac{5}{2} \\ x\ge -4 \\ 3x\le 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge \frac{5}{2} \\ x\ge -4 \\ x\le 3\frac{2}{3} \end{cases}$ $\frac{5}{2}\le x\le 3\frac{2}{3}$	$\begin{cases} 2x-5\ge 0 \\ x+4< 0 \\ 2x-5+x+4\le 2-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge \frac{5}{2} \\ x<-4 \\ 5x\le 3 \end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4\ge 0 \\ -2x+5-x-4\le 2-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x< \frac{5}{2} \\ x\ge -4 \\ x\ge -1 \end{cases}$ $-1\le x<\frac{5}{2}$	$\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4< 0 \\ -2x+5+x+4\le 2-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x< \frac{5}{2} \\ x<-4 \\ x\le -7 \end{cases}$ $x\le -7$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $x \le -7$ lub $-1 \le x \le \frac{11}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający

- wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,-4)$, $\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$, $\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$

albo

- zapisze cztery przypadki:

I. $\begin{cases} 2x-5\ge 0 \\ x+4\ge 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 2x-5\ge 0 \\ x+4< 0 \end{cases}$ III. $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4\ge 0 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} 2x-5< 0 \\ x+4< 0 \end{cases}$

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów.**
Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

- Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.:
  A. dla $x\in(-\infty,-4)$ mamy $-2x+5+x+4\le 2-2x$,
  B. dla $x\in\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$ mamy $-2x+5-x-4\le 2-2x$,
  C. dla $x\in\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$ mamy $2x-5-x-4\le 2-2x$

albo

- zdający zapisze nierówności w poszczególnych przypadkach, np.:
  I. gdy $2x-5\ge 0$ i $x+4\ge 0$, to wtedy $2x-5-x-4\le 2-2x$,
  II. gdy $2x-5\ge 0$ i $x+4<0$, to wtedy $2x-5+x+4\le 2-2x$ (lub stwierdzi, że ten przypadek jest niemożliwy),
  III. gdy $2x-5<0$ i $x+4\ge 0$, to wtedy $-2x+5-x-4\le 2-2x$,
  IV. gdy $2x-5<0$ i $x+4<0$, to wtedy $-2x+5+x+4\le 2-2x$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko dla dwóch przedziałów (spośród A., B., C.), popełni błąd w trzecim i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach (spośród I., III., IV.) , popełni błąd w trzecim przypadku oraz stwierdzi, że przypadek II. jest niemożliwy, i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in(-\infty,-7\rangle\cup\left\langle -1,\frac{11}{3}\right\rangle$.

Uwaga:
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

III sposób rozwiązania (graficzne)

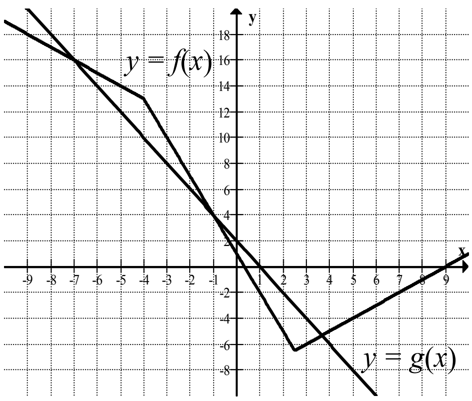
Rysujemy wykresy funkcji $f(x)=|2x-5|-|x+4|$ i $g(x)=-2x+2$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-4)$, $\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$, $\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$.

Zapisujemy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$f(x)=\begin{cases} -x+9 & \text{dla } x\in(-\infty,-4) \\ -3x+1 & \text{dla } x\in\left\langle -4,\frac{5}{2}\right) \\ x-9 & \text{dla } x\in\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right) \end{cases}$$

Rysujemy wykresy funkcji f i g:



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia wykresów funkcji f i g: $x=-7$, $x=-1$, $x=\frac{11}{3}$, sprawdzamy, czy spełniają one równanie $|2x-5|-|x+4|=2-2x$, a następnie podajemy te wszystkie argumenty, dla których $f(x)\le g(x)$: $x\in(-\infty,-7\rangle\cup\left\langle -1,\frac{11}{3}\right\rangle$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-4)$, $\left\langle -4,\frac{5}{2}\right)$, $\left\langle \frac{5}{2},+\infty\right)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach, np.:

A. dla $x \in (-\infty,-4)$ mamy $f(x) = -x+9$,

B. dla $x \in \left\langle -4, \frac{5}{2} \right)$ mamy $f(x) = -3x+1$,

C. dla $x \in \left\langle \frac{5}{2}, +\infty \right)$ mamy $f(x) = x-9$,

lub

$$f(x) = \begin{cases} -x+9 & \text{dla } x \in (-\infty,-4) \\ -3x+1 & \text{dla } x \in \left\langle -4, \frac{5}{2} \right) \\ x-9 & \text{dla } x \in \left\langle \frac{5}{2}, +\infty \right) \end{cases} .$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = -2x+2$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zdający zapisze odpowiedź: $x \in (-\infty,-7\rangle \cup \left\langle -1, \frac{11}{3} \right\rangle$.

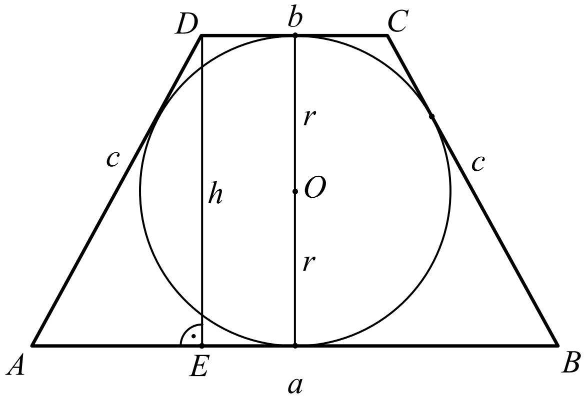
Zadanie 2. (0–4)

Trapez równoramienny *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* jest opisany na okręgu o promieniu *r*. Wykaż, że $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$.

Obszar standardów	Opis wymagań
Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (V.7.c)

<u>I sposób rozwiązania</u>

Sporządzamy rysunek i wprowadzamy oznaczenia: $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = c$, r – promień okręgu wpisanego w trapez, h – wysokość trapezu.



Ponieważ trapez jest równoramienny i opisany na okręgu, więc

$$|AE| = \frac{a-b}{2}, \; h = 2r \text{ oraz } a+b = 2c \text{, czyli } c = \frac{a+b}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED otrzymujemy

$$c^2 = (2r)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \text{ skąd } 4r^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Podstawiając $c = \frac{a+b}{2}$ otrzymujemy

$$4r^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$4r^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4},$$

$$4r^2 = \frac{4ab}{4},$$

$$4r^2 = ab.$$

To kończy dowód.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- wyznaczy długość odcinka AE : $|AE| = \frac{a-b}{2}$

albo

- wyznaczy długość ramienia trapezu: $c = \frac{a+b}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka AE i długość ramienia trapezu: $|AE| = \frac{a-b}{2}$, $c = \frac{a+b}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

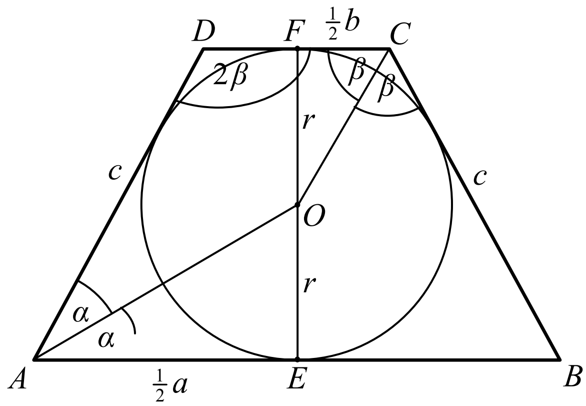
Zdający wykorzysta twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AED i zapisanie: $4r^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający wykaże tezę twierdzenia: $4r^2 = ab$.

II sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek i wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku



Ponieważ w trapez jest wpisany okrąg, więc środek tego okręgu znajduje się na przecięciu dwusiecznych kątów trapezu. Z własności kątów naprzemianległych i przyległych wynika, że

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \text{, czyli } \alpha + \beta = 90^\circ .$$

Stąd

$$\beta = 90^\circ - \alpha .$$

Wnioskujemy stąd, że trójkąty prostokątne AEO i CFO są podobne. Zatem

$$\frac{|OE|}{|AE|} = \frac{|FC|}{|FO|} \text{, czyli } \frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r} \text{ (lub } \operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}a},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{r}{\frac{1}{2}b} \text{ i } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\text{).}$$

Stąd $r^2 = \frac{1}{4}ab$, czyli $4r^2 = ab$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze zależność $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający

- uzasadni, że trójkąty AEO i CFO są podobne i zapisze, że $\frac{|OE|}{|AE|} = \frac{|FC|}{|FO|}$

albo

- wyznaczy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}a}$ oraz $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{\frac{1}{2}b}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający

- zapisze proporcję $\frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r}$

albo

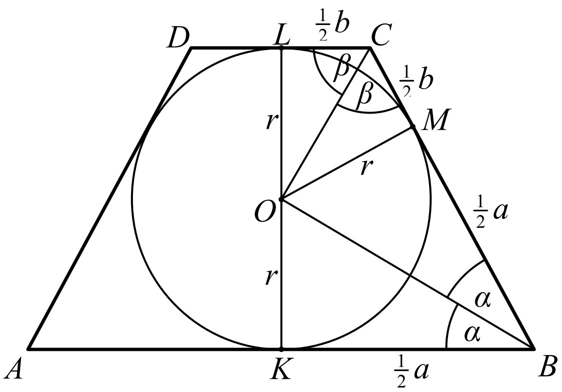
- wykorzysta równości $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ i zapisze $\frac{r}{\frac{1}{2}b} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający wykaże tezę twierdzenia: $4r^2 = ab$.

III sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek i wprowadzamy oznaczenia.



Z twierdzenia o odcinkach stycznych i własności trapezu równoramiennego wynika, że

$$|BM| = |KB| = \frac{1}{2}a \text{ oraz } |CM| = |LC| = \frac{1}{2}b.$$

Ponieważ w trapez jest wpisany okrąg, więc środek okręgu znajduje się na przecięciu dwusiecznych kątów wewnętrznych trapezu. Z własności kątów trapezu:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \text{ czyli } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Stąd wynika, że trójkąt BCO jest prostokątny. Wysokość OM tego trójkąta jest średnią geometryczną długości odcinków BM i CM, czyli

$$r^2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b, \text{ czyli } 4r^2 = a \cdot b,$$

co kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- zapisze, że trójkąt BCO jest prostokątny

albo

- zapisanie, że $|BM| = |KB| = \frac{1}{2}a$ oraz $|CM| = |LC| = \frac{1}{2}b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze, że trójkąt BCO jest prostokątny oraz że $|BM| = \frac{1}{2}a$ oraz $|CM| = \frac{1}{2}b$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze np. $|OM|^2 = |BM| \cdot |CM|$ i narysuje odcinek OM (lub zapisze, że jest to koniec promienia okręgu poprowadzonego do punktu styczności okręgu i ramienia trapezu), ale nie zapisze, że $|BM| = \frac{1}{2}a$ lub $|CM| = \frac{1}{2}b$ (nie wykorzystuje twierdzenia o równości odcinków stycznych), to otrzymuje **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający
- wykorzysta twierdzenie o wysokości trójkąta prostokątnego opuszczonej na przeciwprostokątną, i zapisze, np. że $|OM| = \sqrt{|BM| \cdot |CM|}$

albo
- wykorzysta podobieństwo trójkątów OMB i OMC i zapisze $\frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zdający wykaże tezę twierdzenia: $4r^2 = ab$.

Zadanie 3. (0–3)
Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.R)

<u>**I sposób rozwiązania**</u>

Wybieramy z pięciu miejsc trzy miejsca, na których wstawiamy cyfrę 0, następnie wybieramy jedno z trzech miejsc dla cyfry 5, a na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

$$\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2 = 30 \cdot 64 = 1920.$$

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zdający wybierze trzy miejsca z pięciu dla cyfry 0, wybierze jedno z trzech miejsc dla cyfry 5 i rozmieści na pozostałych dwóch miejscach cyfry różne od 0 i od 5.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt
Zdający obliczy, ile jest liczb sześciocyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy i tylko raz występuje cyfra 5: 1920.
<u>Uwaga</u>
Jeżeli zdający uzyska wynik końcowy, ale traktuje to jak jeden z kilku przypadków, to otrzymuje za rozwiązanie co najwyżej **2 punkty**.

II sposób rozwiązania

Rozróżniamy dwa przypadki:

1. cyfra 5 znajduje się na pierwszym miejscu (jest cyfrą setek tysięcy)

albo

2. cyfra 5 nie znajduje się na pierwszym miejscu.

W pierwszym przypadku wybieramy trzy miejsca (spośród pięciu), na których umieszczamy cyfrę 0, a na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

Takich liczb sześciocyfrowych jest $1\cdot\binom{5}{3}\cdot 8^2=640$.

W drugim przypadku na pierwszym miejscu umieszczamy cyfrę różną od 0 i różną od 5 (mamy 8 takich możliwości), następnie wybieramy miejsce w którym wstawimy cyfrę 5 (mamy 5 możliwości), a następnie z pozostałych czterech miejsc wybieramy trzy, w których wstawiamy cyfrę 0 (możemy to zrobić na 4 sposoby), na pozostałym miejscu umieszczamy cyfrę różną od 0 i różną od 5 (możemy to zrobić na 8 sposobów).
Zatem w tym przypadku mamy $8\cdot 5\cdot 4\cdot 8=1280$ takich liczb.

Mamy więc $1\cdot\binom{5}{3}\cdot 8^2+8\cdot 5\cdot 4\cdot 8=640+1280=1920$ liczb sześciocyfrowych spełniających warunki zadania.

Uwaga
W drugim przypadku możemy także przeprowadzić inne rozumowanie:
spośród miejsc od drugiego do szóstego wybieramy cztery, na których umieszczamy cyfrę 5 i trzy cyfry 0 (mamy $5\cdot 4$ takich możliwości), następnie na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5 (mamy 8^2 takich możliwości).
Tak więc w tym przypadku mamy $5\cdot 4\cdot 8^2=1280$ takich liczb.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający

- zapisze, że jest $1\cdot\binom{5}{3}\cdot 8^2$ liczb sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą jest 5 i cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy

albo

- zapisze, że jest $8\cdot 5\cdot 4\cdot 8$ liczb sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą nie jest 5 i cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze, że jest $1\cdot\binom{5}{3}\cdot 8^2$ liczb sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą jest 5, cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy oraz że jest $8\cdot 5\cdot 4\cdot 8$ liczb sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą nie jest 5 i cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zdający zapisze, że jest 1920 liczb sześciocyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy i cyfra 5 występuje tylko raz.

Uwaga

Jeżeli zdający uzyska wynik końcowy, ale traktuje to jak jeden z kilku przypadków, to otrzymuje za rozwiązanie co najwyżej **2 punkty**.

III sposób rozwiązania

Wybieramy cztery miejsca, na których wstawiamy cyfrę 5 i trzy cyfry 0, na pozostałych miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

Jest $\binom{6}{4}\cdot 4\cdot 8^2 = 3840$ takich ciągów sześciowyrazowych.

Wśród nich znajdują się te, w których cyfra 0 znajduje się na pierwszym miejscu. Jest ich $\binom{5}{3}\cdot 3\cdot 8^2 = 1920$.

Stąd wynika, że liczb sześciocyfrowych spełniających warunki zadania jest $\binom{6}{4}\cdot 4\cdot 8^2 - \binom{5}{3}\cdot 3\cdot 8^2 = 3840 - 1920 = 1920$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę ciągów sześciowyrazowych, w zapisie których tylko jeden raz występuje cyfra 5, a cyfra 0 pojawia się dokładnie trzy razy: $\binom{6}{4}\cdot 4\cdot 8^2$

albo

- zapisze liczbę ciągów sześciowyrazowych, w zapisie których pierwszą cyfrą jest 0: $\binom{5}{3}\cdot 3\cdot 8^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze, że jest $\binom{6}{4}\cdot 4\cdot 8^2$ ciągów sześciowyrazowych, w zapisie których tylko jeden raz występuje cyfra 5, a cyfra 0 pojawia się dokładnie trzy razy, w tym $\binom{5}{3}\cdot 3\cdot 8^2$ takich ciągów, w zapisie których pierwszą cyfrą jest 0.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zdający obliczy, ile jest liczb sześciocyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy i tylko raz występuje cyfra 5: 1920.

Uwaga

Jeżeli zdający uzyska wynik końcowy, ale traktuje to jak jeden z kilku przypadków, to otrzymuje za rozwiązanie co najwyżej **2 punkty**.

Zadanie 4. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R)

Rozwiązanie (I sposób)

Ponieważ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, więc równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ jest równoważne równaniu

$$2\cos^2 x + \cos x = 0,$$

czyli równaniu $\cos x\left(2\cos x + 1\right) = 0$. To równanie jest równoważne alternatywie równań

$$\cos x = 0 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ równanie $\cos x = 0$ ma dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$.

Równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$.

Zapisujemy odpowiedź: równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ ma cztery rozwiązania: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze równanie w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej tego samego argumentu, np. $2\cos^2 x + \cos x = 0$ i na tym zakończy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zdający

- zapisze alternatywę $\cos x = 0$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$

albo

- wprowadzi pomocniczą niewiadomą, np. $t = \cos x$ i zapisze, że $t = 0$ lub $t = -\frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 3 pkt

Zdający

- rozwiąże równanie $\cos x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$

albo

- rozwiąże równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze rozwiązania obu równań w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$\cos x = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$ (albo $x = 90°$ lub $x = 270°$),

$\cos x = -\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$ (albo $x = 120°$ lub $x = 240°$).

Uwagi

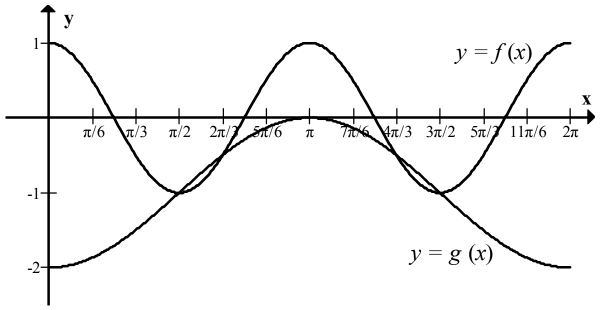
1. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np. $t \in \langle -1, 1 \rangle$, o ile z rozwiązania wynika, że zdający uwzględnia ten warunek.
2. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego: $\cos x = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, $\cos x = -\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający dzieli stronami równanie $2\cos^2 x + \cos x = 0$ przez $\cos x$ bez rozpatrzenia dwóch przypadków i poprawnie rozwiąże równanie $2\cos x + 1 = 0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **2 punkty**.

Rozwiązanie (II sposób)

Równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\cos 2x = -\cos x - 1.$$

Rozpatrujemy dwie funkcje $f(x) = \cos 2x$ oraz $g(x) = -\cos x - 1$ i rysujemy ich wykres (wystarczy ograniczyć się do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$)



Odczytujemy rozwiązania równania: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej, np. $\cos 2x = -\cos x - 1$, wprowadzi dwie funkcje $f(x) = \cos 2x$ oraz $g(x) = -\cos x - 1$ i narysuje wykres jednej z tych funkcji.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej, np. $\cos 2x = -\cos x - 1$, wprowadzi dwie funkcje $f(x) = \cos 2x$ oraz $g(x) = -\cos x - 1$ i narysuje wykresy obu funkcji.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze rozwiązania obu równań w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$\cos x = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$ (albo $x = 90°$ lub $x = 270°$),

$\cos x = -\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$ (albo $x = 120°$ lub $x = 240°$).

Uwaga
Jeżeli zdający poda poprawnie trzy spośród rozwiązań (błędnie odczyta czwarte rozwiązanie, to otrzymuje **3 punkty**, jeśli natomiast odczyta co najwyżej dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 5. (0–5)

Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$, natomiast ciąg $(a-1, b+5, c+19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego (III.5)

I sposób rozwiązania
Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a+b+c=33 \\ a+c=2b \\ (b+5)^2 = (a-1)(c+19) \end{cases}$$

Podstawiamy do pierwszego równania, w miejsce $a+c$ wyrażenie $2b$ i otrzymujemy równanie $3b = 33$, skąd $b = 11$. Układ równań przyjmuje zatem postać:

$$\begin{cases} b=11 \\ a+c=22 \\ 16^2 = (a-1)(c+19) \end{cases}$$

Równania drugie i trzecie tworzą układ z dwiema niewiadomymi, który rozwiążemy, podstawiając wyrażenie $22-a$ w miejsce niewiadomej c w równaniu trzecim. Otrzymujemy zatem równanie kwadratowe z niewiadomą a:

$$a^2 - 42a + 297 = 0.$$

Zatem $a = 33$ lub $a = 9$.

Jeżeli $a = 33$, to $c = -11$ i oczywiście $b = 11$.
Otrzymujemy zatem ciąg arytmetyczny $(33, 11, -11)$, a po odpowiednich przekształceniach ciąg geometryczny $(32, 16, 8)$.
Jeżeli zaś $a = 9$, to $c = 13$ i $b = 11$. Otrzymujemy teraz ciąg arytmetyczny $(9, 11, 13)$, a po wykonaniu odpowiednich przekształceń ciąg geometryczny $(8, 16, 32)$.
Szukanymi liczbami są zatem: $a = 33$, $b = 11$, $c = -11$ lub $a = 9$, $b = 11$, $c = 13$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający wykorzysta własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisze odpowiednie równanie, np. $2b = a + c$ albo $(b+5)^2 = (a-1)(c+19)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający wykorzysta własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisze układ równań umożliwiający obliczenie liczb a, b, c, np.

$$\begin{cases} a+b+c=33 \\ a+c=2b \\ (b+5)^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający przekształci układ równań do równania kwadratowego z niewiadomą a lub c, np.

$$a^2 - 42a + 297 = 0 \text{ lub } c^2 - 2c - 143 = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Zdający

- poprawne rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci jedno z rozwiązań i poprawnie wyznaczy drugą trójkę liczb

albo

- przekształci układ równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający wyznaczy szukane liczby: $a = 33$, $b = 11$, $c = -11$ lub $a = 9$, $b = 11$, $c = 13$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający stosuje własności ciągu arytmetycznego przy rozważaniu ciągu geometrycznego (lub odwrotnie), to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający zapisze odpowiedź w postaci, z której nie można jednoznacznie stwierdzić, że są dwie trójki szukanych liczb, np. zapisze: $a = 33$ lub $a = 9$, $b = 11$, $c = -11$ lub $c = 13$, to otrzymuje **4 punkty**.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy: przez a – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez r – różnicę tego ciągu. Wówczas $b = a + r$, $c = a + 2r$. Z własności ciągu arytmetycznego i z treści zadania otrzymujemy równanie $a + (a + r) + (a + 2r) = 33$ i stąd $a + r = 11$. Zatem ciąg arytmetyczny możemy zapisać następująco: $(11 - r,\ 11,\ 11 + r)$. Ciąg $(a - 1,\ b + 5,\ c + 19)$, a więc ciąg $(10 - r,\ 16,\ 30 + r)$ jest geometryczny, więc możemy zapisać równanie, np.

$$16^2=(10-r)(30+r).$$

Po przekształceniach i uporządkowaniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2+20r-44=0.$$

Rozwiązaniami tego równania są: $r=2$ lub $r=-22$. Następnie obliczamy a, b, c.

Szukane liczby to: $\begin{cases} a=9 \\ b=11 \\ c=13 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=33 \\ b=11 \\ c=-11 \end{cases}$.

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający wprowadzi oznaczenia: a - pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a r – różnica tego ciągu oraz wykorzysta definicję ciągu arytmetycznego do zapisania odpowiedniego równania, np.

$$a+(a+r)+(a+2r)=33 \text{ lub } a+r=11$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający

- wykorzysta własności ciągu geometrycznego i zapisze układ równań, np.

$$\begin{cases} a+r=11 \\ (a+r+5)^2=(a-1)(a+2r+19) \end{cases}$$

albo

- zapisze wyrazy ciągu geometrycznego w zależności od r, np. $(10-r,\ 16,\ 30+r)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający przekształci układ równań do równania z niewiadomą r, np.

$$(11-r+r+5)^2=(11-r-1)(11-r+2r+19) \text{ lub } r^2+20r-44=0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)...4 pkt

Zdający

- poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci jedno z rozwiązań, np. $r<0$ i poprawnie wyznaczy drugą trójkę liczb

albo

- przekształci układ równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Zdający wyznaczy dwie trójki liczb: $\begin{cases} a=9 \\ b=11 \\ c=13 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=33 \\ b=11 \\ c=-11 \end{cases}$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający stosuje własności ciągu arytmetycznego przy rozważaniu ciągu geometrycznego (lub odwrotnie), to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający zapisze odpowiedź w postaci, z której nie można jednoznacznie stwierdzić, że są dwie trójki szukanych liczb, np. zapisze: $a=33$ lub $a=9$, $b=11$, $c=-11$ lub $c=13$, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 6. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+2(1-m)x+m^2-m=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2+x_2^2$.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (IV.3.b.R)

Rozwiązanie
Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2+x_2^2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $\left[2(1-m)\right]^2-4\cdot 1\cdot\left(m^2-m\right)>0$,

$$4(m-1)^2-4m(m-1)>0,$$
$$-m+1>0,$$
$$m<1,$$
$$m\in(-\infty,1).$$

Nierówność $x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2+x_2^2$ zapisujemy w postaci równoważnej

$$x_1 \cdot x_2 \le 6m \le (x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Wykorzystując wzory Viete'a, otrzymujemy układ nierówności z niewiadomą m:

$$\frac{m^2-m}{1} \le 6m \quad \text{i} \quad 6m \le \left(\frac{2(m-1)}{1}\right)^2-2\cdot\frac{m^2-m}{1},$$

czyli

$$m^2-7m\le 0 \quad \text{i} \quad 6m\le 4\left(m^2-2m+1\right)-2m^2+2m,$$
$$m(m-7)\le 0 \quad \text{i} \quad m^2-6m+2\ge 0,$$
$$m\in\langle 0,7\rangle \ \text{i} \ m\in\left(-\infty,3-\sqrt{7}\right\rangle\cup\left\langle 3+\sqrt{7},+\infty\right),$$
$$m\in\left\langle 0,3-\sqrt{7}\right\rangle\cup\left\langle 3+\sqrt{7},7\right\rangle.$$

Stąd i z poprzednio warunku otrzymujemy

$$m \in \left\langle 0, 3-\sqrt{7} \right\rangle.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, 1)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $x_1 \cdot x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Za rozwiązanie nierówności $x_1 \cdot x_2 \leq 6m$: $m \in \langle 0, 7 \rangle$ zdający otrzymuje **1 punkt.**

Za rozwiązanie nierówności $6m \leq x_1^2 + x_2^2$ zdający otrzymuje 3 punkty. Przy czym w tej części:

- **1 punkt** zdający otrzymuje za zapisanie wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$ w postaci $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$,
- **2 punkty** zdający otrzymuje za zapisanie nierówności $6m \leq x_1^2 + x_2^2$ w postaci nierówności z jedną niewiadomą, np.: $6m \leq 4(m^2 - 2m + 1) - 2m^2 + 2m$,
- **3 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności $6m \leq x_1^2 + x_2^2$: $m \in \left(-\infty, 3-\sqrt{7}\right\rangle \cup \left\langle 3+\sqrt{7}, +\infty\right)$.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego.

Rozwiązanie pełne *(trzeci etap)*..**6 pkt**

Zdający wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności i poda odpowiedź: $m \in \left\langle 0, 3-\sqrt{7} \right\rangle$.

Uwaga

W przypadku rozwiązania z usterkami, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże co najmniej jedną nierówność z etapu II.

Zadanie 7. (0–4)

Prosta o równaniu $3x - 4y - 36 = 0$ przecina okrąg o środku $S = (3, 12)$ w punktach A i B. Długość odcinka AB jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczenie równania okręgu (IV.8.e.g.c.R)

<u>**I sposób rozwiązania**</u>

Odległość środka S okręgu od prostej o równaniu $3x-4y-36=0$ jest równa

$$\frac{|3\cdot 3-4\cdot 12-36|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-75|}{5}=15\,.$$

Jest to też długość odcinka SC, gdzie C jest środkiem cięciwy AB. Ponieważ $|AB|=40$, więc

$$|AC|=\frac{1}{2}\cdot 40=20\,.$$

Trójkąt ACS jest prostokątny, a jego przeciwprostokątną jest promień r okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $|AS|^2=|AC|^2+|SC|^2$, czyli

$$r^2=20^2+15^2=400+225=625\,.$$

Równanie okręgu ma więc postać

$$(x-3)^2+(y-12)^2=625\,.$$

<u>Uwaga</u>

Zdający może obliczyć odległość punktu S od prostej o równaniu $3x-4y-36=0$ w inny sposób, np. wybrać na prostej dwa punkty (np. $C=(12,0)$ i $D=(0,-9)$), obliczyć pole trójkąta CDS ($P_{CDS}=\frac{225}{2}$), a stąd obliczyć szukaną odległość, czyli wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka S: $h=15$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- wykona rysunek, na którym zaznaczy środek cięciwy AB albo zapisze, że środek cięciwy AB, środek okręgu i koniec cięciwy to wierzchołki trójkąta prostokątnego,

albo

- wykorzysta współrzędne środka okręgu i zapisze równanie okręgu w postaci:

$$(x-3)^2+(y-12)^2=r^2,$$

albo

- obliczy połowę długości cięciwy AB: $\frac{1}{2}|AB|=20$,

albo

- obliczy odległość punktu S od prostej AB i nie interpretuje jej błędnie (np. jako promień szukanego okręgu) i na tym zakończy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy odległość środka okręgu od prostej o równaniu $3x-4y-36=0$, np. wykorzystując wzór na odległość punktu od prostej, obliczając wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka S na bok zawarty w tej prostej

$$\frac{|3\cdot 3-4\cdot 12-36|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=15 \text{ lub } \frac{2P_{CDS}}{|CD|}=15\,,$$

gdzie C i D leżą na prostej o równaniu $3x-4y-36=0$

oraz

- wykona rysunek, na którym zaznaczy środek cięciwy *AB*

lub

- zapisze, że środek cięciwy *AB*, środek okręgu i koniec cięciwy to wierzchołki trójkąta prostokątnego

lub

- wykorzysta współrzędne środka okręgu i zapisze równanie okręgu w postaci: $(x-3)^2+(y-12)^2=r^2$

lub

- obliczy połowę długości cięciwy *AB*: $\frac{1}{2}|AB|=20$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt
Zdający zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ACS*, gdzie *C* oznacza środek cięciwy *AB*: $r^2=20^2+15^2$.

Rozwiązanie pełne...4 pkt
Zdający zapisze równanie okręgu: $(x-3)^2+(y-12)^2=625$.

<u>II sposób rozwiązania</u>
Prosta prostopadła do prostej o równaniu $3x-4y-36=0$ przechodząca przez środek szukanego okręgu jest symetralną cięciwy *AB*. Jej równanie ma postać

$$4(x-3)+3(y-12)=0,$$
$$4x+3y-48=0.$$

Środek *D* cięciwy *AB* jest punktem przecięcia tej prostej z prostą *AB*. Jego współrzędne obliczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases}3x-4y-36=0\\4x+3y-48=0\end{cases},\quad \begin{cases}y=\frac{3}{4}x-9\\4x+3\left(\frac{3}{4}x-9\right)-48=0\end{cases},\quad \begin{cases}y=\frac{3}{4}x-9\\\frac{25}{4}x-75=0\end{cases},\quad \begin{cases}x=12\\y=0\end{cases},$$

więc $D=(12,0)$.

Punkty *A* i *B* leżą na okręgu o środku *D* i promieniu 20 i na prostej *AB*. Współrzędne punktów *A* i *B* obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases}(x-12)^2+y^2=20^2\\3x-4y-36=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-12)^2+y^2=20^2\\y=\frac{3}{4}x-9\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-12)^2+\left(\frac{3}{4}x-9\right)^2=20^2\\y=\frac{3}{4}x-9\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-12)^2+\frac{9}{16}(x-12)^2=400\\y=\frac{3}{4}x-9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{25}{16}(x-12)^2=400\\y=\frac{3}{4}x-9\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4}|x-12| = 20 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-12| = 16 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \vee x = 28 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -12 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 28 \\ y = 12 \end{cases}$$

Zatem $A = (-4,-12)$, $B = (28,12)$.

Promień szukanego okręgu jest równy $r = |AS| = \sqrt{(-4-3)^2 + (-12-12)^2} = \sqrt{625} = 25$.

Stąd wynika, że szukany okrąg ma równanie $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 625$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający
- wykona rysunek, na którym zaznaczy środek cięciwy *AB* albo zapisze, że środek cięciwy *AB*, środek okręgu i koniec cięciwy to wierzchołki trójkąta prostokątnego,

albo
- wykorzysta współrzędne środka okręgu i zapisze równanie okręgu w postaci:
$$(x-3)^2 + (y-12)^2 = r^2,$$

albo
- obliczy połowę długości cięciwy *AB*: $\frac{1}{2}|AB| = 20$,

albo
- wyznaczy równanie symetralnej cięciwy *AB*: $4(x-3)+3(y-12)=0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy współrzędne środka cięciwy *AB*: $D = (12,0)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania……………………………………….3 pkt

Zdający obliczy współrzędne jednego z punktów *A* lub *B*: $A = (-4,-12)$, $B = (28,12)$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze równanie okręgu: $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 625$.

Zadanie 8. (0–4)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=4x^3-5x^2-23x+m$ przez dwumian $x+1$ jest równa 20.

Oblicz wartość współczynnika *m* oraz pierwiastki tego wielomianu.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$ i twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu (II.2.b.c.R)

Rozwiązanie

Reszta z dzielenia wielomianu *W* przez dwumian $x+1$ jest równa $W(-1)$. Zatem

$$4(-1)^3-5(-1)^2-23(-1)+m=20.$$

Stąd $m=6$. Wielomian *W* ma zatem postać $W(x)=4x^3-5x^2-23x+6$.

Zauważmy, że $W(3)=4\cdot 3^3-5\cdot 3^2-23\cdot 3+6=3\cdot(36-15-23+2)=0$.

Zatem wielomian *W* jest podzielny przez dwumian $x-3$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy

$$4x^3-5x^2-23x+6=(x-3)(4x^2+7x-2).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu $4x^2+7x-2$:

$$\Delta=7^2-4\cdot 4\cdot(-2)=81,\ \sqrt{\Delta}=9,$$

$$x_1=\frac{-7-9}{8}=-2,\ x_2=\frac{-7+9}{8}=\frac{1}{4}.$$

W rezultacie wielomian *W* ma trzy pierwiastki: $x=-2$, $x=\frac{1}{4}$, $x=3$.

Uwaga

Możemy też zauważyć, że pierwiastkiem wielomianu *W* jest liczba –2, gdyż

$$W(-2)=4\cdot(-2)^3-5\cdot(-2)^2-23\cdot(-2)+6=2\cdot(-16-10+23+3)=0.$$

Zatem wielomian *W* jest podzielny przez dwumian $x+2$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy:

$$4x^3-5x^2-23x+6=(x+2)(4x^2-13x+3).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu $4x^2-13x+3$:

$$\Delta=(-13)^2-4\cdot 4\cdot 3=169-48=121,\ \sqrt{\Delta}=11,$$

$$x_1=\frac{13-11}{8}=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{13+11}{8}=3.$$

W rezultacie wielomian *W* ma trzy pierwiastki: $x=-2$, $x=\frac{1}{4}$, $x=3$.

albo

Możemy zauważyć, że liczba $\frac{1}{4}$ jest pierwiastkiem wielomianu *W*, gdyż

$$W\left(\tfrac{1}{4}\right)=4\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^3-5\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2-23\cdot\tfrac{1}{4}+6=\tfrac{1}{16}-\tfrac{5}{16}-5\tfrac{3}{4}+6=0.$$

Zatem wielomian *W* jest podzielny przez dwumian $x-\frac{1}{4}$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy:

$$4x^3-5x^2-23x+6=\left(x-\tfrac{1}{4}\right)(4x^2-4x-24).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu $4x^2-4x-24$:

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 4\cdot(-24)=16+16\cdot 24=16\cdot 25,\ \sqrt{\Delta}=4\cdot 5=20,$$

$$x_1=\frac{4-20}{8}=-2,\ x_2=\frac{4+20}{8}=3.$$

W rezultacie wielomian *W* ma trzy pierwiastki: $x=-2$, $x=\frac{1}{4}$, $x=3$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze równanie z niewiadomą *m*, np. $4\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-23\cdot(-1)+m=20$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy wartość współczynnika *m*: $m=6$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający

- poda jeden z pierwiastków wielomianu, np.: 3, podzieli wielomian przez dwumian $(x-3)$ i otrzyma iloraz $4x^2+7x-2$ lub poda pierwiastek (-2), podzieli wielomian przez dwumian $(x+2)$ i otrzyma iloraz $4x^2-13x+3$,

albo

- zapisze wielomian *W* w postaci iloczynowej, np.: $W(x)=4(x+2)(x-3)(x-a)$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu *W*: -2, $\frac{1}{4}$, 3.

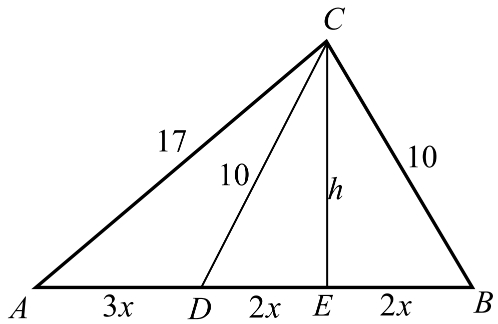
Zadanie 9. (0–5)

Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $|AC|=17$ i $|BC|=10$. Na boku *AB* leży punkt *D* taki, że $|AD|:|DB|=3:4$ oraz $|DC|=10$. Oblicz pole trójkąta *ABC*.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7)

I sposób rozwiązania

Poprowadźmy wysokość *CE* trójkąta *ABC*



Niech $|AD|=3x$, wtedy $|DB|=4x$. Trójkąt *DBC* jest równoramienny, gdyż $|BC|=|DC|$, więc $|DE|=|EB|=2x$. Stosując twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów *BEC* i *AEC*, otrzymujemy

$$(2x)^2+h^2=10^2 \text{ oraz } (5x)^2+h^2=17^2,$$

czyli

$$4x^2 + h^2 = 10^2 \text{ oraz } 25x^2 + h^2 = 17^2 .$$

Stąd otrzymujemy

$$h^2 = 10^2 - 4x^2 \text{ oraz } 25x^2 + 10^2 - 4x^2 = 17^2 .$$

Rozwiązujemy drugie z równań

$$21x^2 = 189 ,$$
$$x^2 = 9 ,$$
$$x = 3 .$$

Zatem $h = \sqrt{10^2 - 4\cdot 3^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$.

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 7x\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 8 = 84 .$$

Uwaga

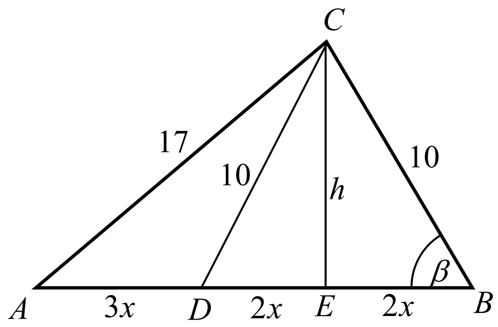
Po obliczeniu x mamy już długości wszystkich boków trójkąta, więc jego pole możemy również obliczyć ze wzoru Herona. Wtedy mamy

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24 ,\ p-a = 24-10 = 14 ,\ p-b = 24-17 = 7 ,\ p-c = 24-21 = 3 .$$

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = 84 .$$

II sposób rozwiązania

Poprowadźmy wysokość CE trójkąta ABC i oznaczmy niech $|\sphericalangle ABC| = \beta$.



Niech $|AD| = 3x$, wtedy $|DB| = 4x$. Trójkąt DBC jest równoramienny, gdyż $|BC| = |DC|$, więc $|DE| = |EB| = 2x$. Z trójkąta prostokątnego EBC obliczamy

$$\cos\beta = \frac{2x}{10} = \frac{x}{5}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC otrzymujemy

$$17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2\cdot 7x\cdot 10\cdot\cos\beta.$$

Zatem

$$289 = 49x^2 + 100 - 2\cdot 7x\cdot 10\cdot\frac{x}{5},$$

czyli

$$189 = 49x^2 - 28x^2,$$
$$189 = 21x^2,$$
$$x^2 = 9,$$
$$x = 3.$$

Zatem $h = \sqrt{10^2 - 4\cdot 3^2} = \sqrt{100-36} = 8$.

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 7x\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 8 = 84.$$

Uwaga

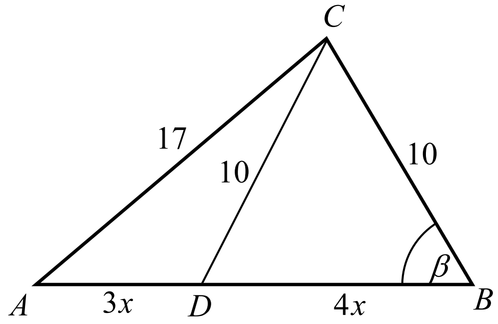
Po obliczeniu x mamy już długości wszystkich boków trójkąta, więc jego pole możemy również obliczyć ze wzoru Herona. Wtedy mamy

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24,\ p-a = 24-10 = 14,\ p-b = 24-17 = 7,\ p-c = 24-21 = 3.$$

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = 84.$$

III sposób rozwiązania

Oznaczmy $|\sphericalangle ABC| = \beta$.



Niech $|AD| = 3x$, wtedy $|DB| = 4x$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABC i DBC otrzymujemy

$$17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2\cdot 7x\cdot 10\cdot\cos\beta \quad \text{oraz} \quad 10^2 = (4x)^2 + 10^2 - 2\cdot 4x\cdot 10\cdot\cos\beta,$$

czyli

$$289 = 49x^2 + 100 - 140x\cdot\cos\beta \quad \text{oraz} \quad 100 = 16x^2 + 100 - 80x\cdot\cos\beta.$$

Z drugiego równania obliczamy

$$\cos\beta = \frac{16x^2}{80x} = \frac{x}{5}.$$

Stąd i z pierwszego równania dostajemy

$$189 = 49x^2 - 140x\cdot\frac{x}{5},$$

$$189 = 21x^2,$$

$$x^2 = 9,$$

$$x = 3.$$

Zatem $h = \sqrt{10^2 - 4\cdot 3^2} = \sqrt{100-36} = 8$.

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 7x\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 8 = 84.$$

Uwaga

Po obliczeniu x mamy już długości wszystkich boków trójkąta, więc jego pole możemy również obliczyć ze wzoru Herona. Wtedy mamy

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24,\quad p-a = 24-10 = 14,\quad p-b = 24-17 = 7,\quad p-c = 24-21 = 3.$$

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = 84.$$

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający zapisze stosunek długości odcinków AD i DB, np.: $|AD| = 3x$, $|DB| = 4x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć wprowadzoną niewiadomą, np.:

- $(2x)^2 + h^2 = 10^2$ oraz $(5x)^2 + h^2 = 17^2$,

albo

- $\cos\beta = \frac{x}{5}$ oraz $17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2\cdot 7x\cdot 10\cdot\cos\beta$,

albo

- $17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2\cdot 7x\cdot 10\cdot\cos\beta$ oraz $10^2 = (4x)^2 + 10^2 - 2\cdot 4x\cdot 10\cdot\cos\beta$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający obliczy x albo h: $x = 3$, $h = 8$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Zdający obliczy x oraz wysokość trójkąta z błędem rachunkowym i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole trójkąta ABC.

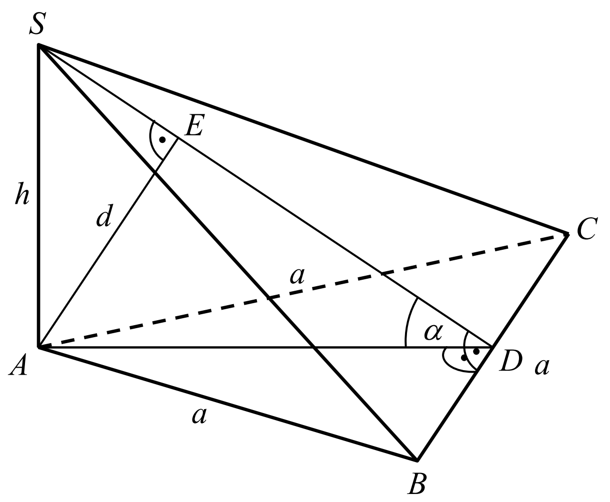
Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Zdający obliczy pole trójkąta ABC: $P_{ABC} = 84$.

Zadanie 10. (0–4)

W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a. Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od ściany BCS jest równa d. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w ostrosłupie (IV.9.a.b)

I sposób rozwiązania



Zaznaczamy na rysunku odcinek AE, długość tego odcinka jest odległością wierzchołka A od ściany BCS i jednocześnie wysokością trójkąta prostokątnego DAS, gdzie D jest środkiem krawędzi BC danego ostrosłupa. Zatem $|AE| = d$.

Ponadto w trójkącie DAS wprowadzamy oznaczenia:

α – miara kąta ADS i $h = |AS|$ – wysokość ostrosłupa $ABCS$.

Z trójkątów prostokątnych DAS i AED, otrzymujemy $\sin\alpha = \frac{|AS|}{|SD|} = \frac{|AE|}{|AD|}$.

Ponieważ $|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, to $\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

Przekształcamy równość $\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$ i wyznaczamy wysokość ostrosłupa h.

Otrzymujemy kolejno:

$$\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}} = \frac{2d}{a\sqrt{3}}$$

$$\frac{h^2}{4h^2 + 3a^2} = \frac{d^2}{3a^2}$$

$$h^2 = \frac{3a^2d^2}{3a^2 - 4d^2}$$

czyli

$$h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa $ABCS$:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}} = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Uwaga

Równość $\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$ możemy również otrzymać, korzystając z podobieństwa trójkątów DAS i AED.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zaznaczy na rysunku odcinek o długości d prostopadły do płaszczyzny BCS.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze równość, z której można wyznaczyć h w zależności od a i d, np.:

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

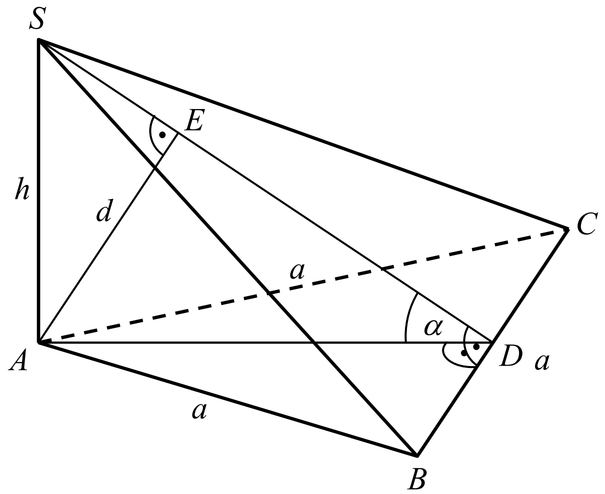
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający wyznaczy wysokość h ostrosłupa: $h=\dfrac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający wyznaczy objętość V ostrosłupa: $V=\dfrac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>



Zaznaczamy na rysunku odcinek AE, długość tego odcinka jest odległością wierzchołka A od ściany BCS i jednocześnie wysokością ostrosłupa $ABCS$ o podstawie BSC.

Zatem objętość V ostrosłupa $ABCS$ jest równa: $V=\dfrac{1}{3}P_{BSC}\cdot d$.

Obliczmy P_{BSC} pole trójkąta BSC: $P_{BSC}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot|SD|$.

Wprowadzamy oznaczenie: α – miara kąta ADS i z trójkątów prostokątnych DAS i $AA'D$, otrzymujemy:

$$\cos\alpha=\frac{|AD|}{|SD|}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{|SD|} \text{ i } \sin\alpha=\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

Z jedynki trygonometrycznej obliczamy $|SD|$:

$$\left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{|SD|}\right)^2+\left(\frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\right)^2=1.$$

$$\frac{3a^2}{4|SD|^2}=1-\frac{4d^2}{3a^2}$$

$$\frac{3a^2}{4|SD|^2}=\frac{3a^2-4d^2}{3a^2}$$

$$|SD|=\frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2-4d^2}}$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa *ABCS*:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2-4d^2}}\cdot d=\frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}\ .$$

__Schemat oceniania II sposobu rozwiązania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zaznaczy na rysunku odcinek o długości *d* prostopadły do płaszczyzny *BCS*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze równość, z której można wyznaczyć długość odcinka *SD*, np.:

$$\left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{|SD|}\right)^2+\left(\frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\right)^2=1\ .$$

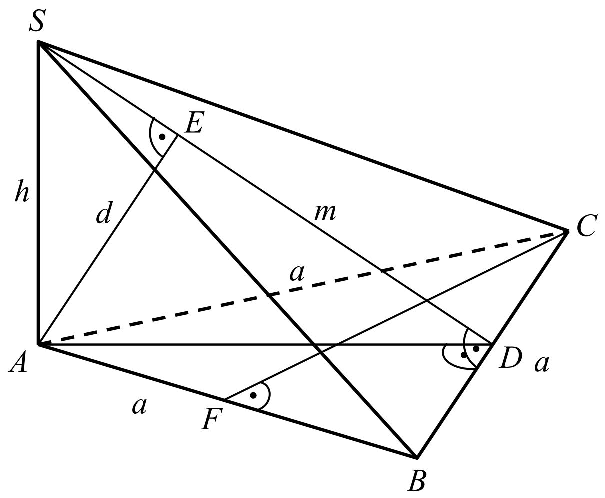
Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka *SD*: $|SD|=\frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający wyznaczy objętość ostrosłupa: $V=\frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

III sposób rozwiązania



Płaszczyzny ABC i ABS są prostopadłe, trójkąt ABC jest równoboczny, więc jego wysokość $|CF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ jest jednocześnie wysokością ostrosłupa opuszczoną na płaszczyznę podstawy ABS. Zatem

(1) $$V = \frac{1}{3} P_{ABS} \cdot |CF| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADS otrzymujemy

$$|DS|^2 = |AD|^2 + |AS|^2,$$

$$m^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2.$$

Stąd

$$m = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4h^2}.$$

Odcinek AE jest wysokością ostrosłupa opuszczoną na podstawę BCS, więc

$$V = \frac{1}{3} P_{BCS} \cdot |DS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} am \cdot d,$$

(2) $$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4h^2} \cdot d.$$

Porównując prawe strony (1) i (2) otrzymujemy

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4h^2} \cdot d.$$

Stąd

$$ah\sqrt{3} = d\sqrt{3a^2 + 4h^2},$$

$$3a^2h^2 = d^2\left(3a^2 + 4h^2\right),$$

$$3a^2h^2 = 3a^2d^2 + 4d^2h^2,$$

$$3a^2h^2 - 4d^2h^2 = 3a^2d^2,$$

$$h^2\left(3a^2 - 4d^2\right) = 3a^2d^2,$$

$$h^2 = \frac{3a^2d^2}{3a^2-4d^2},$$

$$h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4d^2}}.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3}P_{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4d^2}} = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}.$$

<u>**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający zaznaczy na rysunku odcinek o długości *d* prostopadły do płaszczyzny *BCS*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze równość (wynikającą z wyrażenia objętości ostrosłupa na dwa sposoby), z której można wyznaczyć *h* w zależności od *a* i *d*, np.:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\cdot m}{2}\cdot d\text{, gdzie } m = \sqrt{h^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający wyznaczy wysokość *h* ostrosłupa: $h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający wyznaczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

Zadanie 11. (0–4)

Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Stosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10.b.d)

<u>**Rozwiązanie**</u>

Zdarzeniem elementarnym w tym doświadczeniu jest każdy ciąg czteroelementowy, którego wyrazami są liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jest to model klasyczny. Wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest 6^4.

Zauważmy, że $60 = 1\cdot 2\cdot 5\cdot 6 = 1\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$. Oznacza to, że należy rozpatrzyć trzy przypadki:

1. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,2,5,6\}$. Jest ich $4! = 24$.
2. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,3,4,5\}$. Jest ich $4! = 24$.
3. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{2,3,5\}$ i których dwa wyrazy są dwójkami. Jest ich $4\cdot 3 = 12$.
4. Otrzymujemy zatem 60 ciągów. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest więc równe $\frac{60}{6^4} = \frac{5}{108}$.

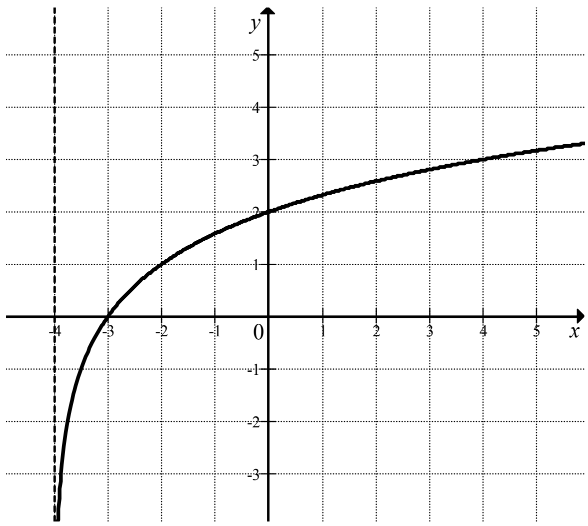
<u>**Schemat oceniania**</u>

Zasadnicze trudności tego zadania polegają na zauważeniu trzech różnych sposobów otrzymania iloczynu równego 60 oraz zliczeniu, w każdym przypadku, liczby różnych czterowyrazowych ciągów. Za każdy rozpatrzony przypadek wraz z obliczoną poprawnie liczbę ciągów zdający otrzymuje **1 punkt**.

Czwarty punkt przyznamy zdającemu, który zapisze, że prawdopodobieństwo opisanego w treści zadania zdarzenia jest równe $\frac{|A|}{6^4}$, gdzie $|A|$ oznacza obliczoną przez zdającego liczbę ciągów.

Zadanie 12. (0–3)

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji logarytmicznej *f* określonej wzorem $f(x) = \log_2(x-p)$.



a) Podaj wartość *p*.

b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.

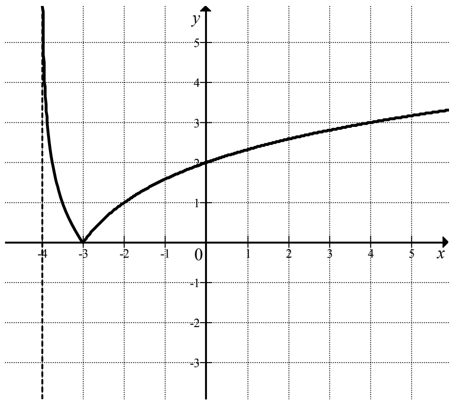
c) Podaj wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Sporządzanie wykresu funkcji $y=\left\|f\left(x\right)\right\|$ na podstawie danego wykresu funkcji logarytmicznej $y=f\left(x\right)$; badanie liczby rozwiązań równania z parametrem (IV.4.a.d i 4.a.e.R)

Rozwiązanie

a) Odczytujemy z wykresu, że $p=-4$. Możemy również zauważyć, że $f\left(0\right)=2$. Stąd otrzymujemy $\log_2\left(-p\right)=2$. Z definicji logarytmu mamy $-p=2^2=4$. Stąd $p=-4$.

b) Wykres funkcji określonej wzorem $y=\left|f\left(x\right)\right|$ uzyskamy z wykresu funkcji *f*. W tym celu wystarczy tę część wykresu funkcji *f*, która leży pod osią *Ox*, odbić symetrycznie względem tej osi, a pozostałą część wykresu pozostawić bez zmian. W rezultacie otrzymujemy wykres



c) Z wykresu odczytujemy, że równanie $\left|f\left(x\right)\right|=m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków dla $m>2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....1 pkt

Zdający
- zapisze, że $p=-4$

albo
- narysuje wykres funkcji o wzorze $y=\left|f\left(x\right)\right|$

albo
- poda wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $\left|f\left(x\right)\right|=m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

  Uwaga
  Jeżeli zdający ustala wartości parametru *m* na podstawie błędnie narysowanego wykresu funkcji $y=\left|f\left(x\right)\right|$, to nie otrzymuje punktu za wyznaczenie tych wartości.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zdający

- zapisze, że $p=-4$ i narysuje wykres funkcji o wzorze $y=|f(x)|$ i nie poda wszystkich wartości parametru *m*, dla których równanie $|f(x)|=m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków

albo

- nie poda wartości *p*, narysuje wykres funkcji o wzorze $y=|f(x)|$ i poda wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $|f(x)|=m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków

albo

- zapisze, że $p=-4$, nie narysuje wykresu funkcji o wzorze $y=|f(x)|$ i poda wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $|f(x)|=m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt
Zdający poda wartość $p=-4$, narysuje wykres funkcji o wzorze $y=|f(x)|$ i poda wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $|f(x)|=m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków: $m>2$.